https://doi.org/10.4322/CBPAT.2022.012

IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA SIMULAÇÃO DA PROPAGAÇÃO DE FISSURAS ATRAVÉS DO CRITÉRIO DA MÍNIMA DENSIDADE DE ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

Patrick O. B. Costa[1]*
*Autor de contato: patrick.costa@ufrgs.br

[1] Departamento de Estruturas, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, Brasil

RESUMO

As manifestações patológicas tais como, fissuras, trincas e fraturas advêm de muitas causas distintas isoladas ou em conjunto. As fissuras e trincas em materiais frágeis em elementos de placa submetidos a esforços de tração são comuns, no entanto, é possível estabelecer modelos de zonas coesivas que simulam o comportamento e a propagação de tais fissuras e/ou trincas. O critério da Máxima Tensão Circunferencial é comparado com o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação, e em seguida é realizado a implementação de um programa computacional na linguagem de alto nível *Pyhton 3*, utilizando o critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação para uma maior visualização e interpretação desse efeito. Os resultados demonstraram ser bem similares e coerentes entre os dois critérios comparados, e o programa computacional demonstrou ser útil para visualização e interpretação da propagação das fissuras após uma condição inicial.
Palavras-chave: manifestações patológicas; modelos coesivos; materiais frágeis; Python 3.

ABSTRACT

The pathological manifestations such as, cracks, cracks and fractures arise from many different causes isolated or together. Fissures and cracks in brittle materials in plate elements subjected to tensile stresses are common, however, it is possible to establish models of cohesive zones that simulate the behavior and propagation of such cracks and/or cracks. The Maximum Circumferential Stress criterion is compared with the Minimum Strain Energy Density criterion, and then a computational program is implemented in the high-level language Python 3, using the Minimum Strain Energy Density criterion for greater visualization and interpretation of this effect. The results demonstrated to be very similar and coherent between the two compared criteria, and the computational program demonstrated to be useful for visualization and interpretation of crack propagation after an initial condition.
Keywords: pathological manifestations; cohesive models; brittle materials; Python 3.

1. INTRODUÇÃO

Uma das manifestações patológicas mais decorrentes na área da construção civil é a propagação de fissuras, trincas e até mesmo fraturas em materiais frágeis ou quase frágeis, e.g., concreto e alvenaria, sejam elas ocorridas pelo recalque da fundação, esforços atuantes, deslocamentos, variação de temperatura, inclusive imperfeições dos materiais a níveis microscópicos. Mesmo sabendo da ocorrência delas, não é tão simples erradica-las, no entanto é possível prever a direção, sentido e a distância relativa da propagação a partir de fissuras pré-existentes.

A subárea da engenharia que estuda o comportamento e a capacidade dos materiais e componentes estruturais sujeitos a defeitos, i.e., trincas, fissuras, fraturas e imperfeições materiais é a mecânica da fratura (FIGUEIREDO, 2008).

Na literatura existem diversos modelos coesivos para tratar o comportamento das fissuras e trincas, sendo o modelo de fraturamento coesivo uma ferramenta conhecida na resolução de problemas de fratura quando a zona inelástica na extremidade da fissura apresenta dimensões desprezíveis as dimensões da fissura.

O primeiro modelo coesivo foi proposto por Dugdale (1960), aplicado para materiais dúcteis onde a fissura real é substituída por uma fissura efetiva com um comprimento maior devido a zona plástica.

O modelo de Barenblatt (1959) assume que as tensões coesivas dependem da abertura das faces da fissura, visto que se a abertura atinge um valor crítico as tensões coesivas cessam e a propagação da fissura ocorre.

Já Barenblatt (1962) analisou chapas finas fissuradas, onde obteve experimentalmente que o raio da zona plastificada ao redor da fissura é aproximadamente a espessura da chapa, i.e., a tensão da região plastificada é constante e igual a de escoamento do material, podendo aumentar com o tamanho da fissura, se o material for considerado elasto-plástico perfeito.

Outros modelos foram propostos que podem ser verificados nos trabalhos de Modeer (1979), Petersson (1981) e Gustafsson (1985), sendo relevante destacar que se diferenciam em dois aspectos principais, sendo eles a dimensão da zona coesiva e a forma da distribuição das tensões.

Posteriormente, Hillerborg et. al. (1976) propôs a primeira teoria da mecânica da fratura não linear a materiais quase frágeis, além disso estudou o modelo de fissura fictícia, sendo desenvolvida por ensaios de tração uniaxial em corpos de concreto, observando após uma determinada carga o início de uma fissura em uma pequena região de deformação.

O modelo de zona coesiva utilizado por Yang et. al. (1996) apresenta a análise bidimensional de fraturas com o modelo coesivo de dois parâmetros (força de superfície máxima e máxima distância de separação normal) onde supõe-se que a interação entre duas superfícies de fratura coesiva se assemelha a uma linha-mola. Este modelo pode ser aplicado para maioria dos casos de fratura com efeito ponte, como é o caso deste trabalho.

Por meio do estudo da mecânica da fratura é possível a definição de critérios de forma a se conseguir determinar a direção de propagação da fissura assim como a carga crítica de fratura.

O critério da Máxima Tensão Circunferencial proposto por Erdogan e Sih (1963) define que a fissura irá crescer perpendicularmente à direção de atuação da máxima tensão circunferencial atuante na extremidade da fissura.

O critério utilizado neste trabalho é o da Mínima Densidade de Energia de Deformação proposto por Sih (1974), onde a direção da propagação da fissura é determinada pelo valor da densidade de energia de deformação, S, nas proximidades da fissura. A energia de deformação é definida como a energia armazenada no sistema devido à mudança no estado de deformação.

2. METODOLOGIA

O presente trabalho é dividido em duas partes: a primeira parte se trata da apresentação do critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação e sua comparação com o critério da Máxima Tensão Circunferencial, ambos como modelos de propagação de zona coesiva. Esses métodos foram implementados e resolvidos através do *software* MATLAB®.

A segunda parte do trabalho consiste no desenvolvimento de um *software* por meio da implementação computacional do critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação no qual foi criado uma interface que possibilita a visualização da propagação da zona coesiva em uma placa de material frágil submetida a um deslocamento controlado a partir de uma fratura de canto. Em decorrência disso, foi utilizado uma linguagem interpretada de alto nível conhecida como *Python* na versão *3*, através do ambiente de desenvolvimento integrado (IDE – *Integrated Development Environment*) VISUAL STUDIO CODE, com o *framework* TKINTER para a elaboração da interface gráfica - GUI (*graphic user interface).*

2.1 Critério da Mínima Densidade de Energia de Deformação

A Equação 1 apresenta a expressão para a determinação da densidade de energia:

$$S(\theta) = a_{11} \cdot K_I^2 + 2 \cdot a_{12} \cdot K_I \cdot K_{II} + a_{22} \cdot K_{II}^2 \tag{1}$$

Em que:

$$a_{11} = \frac{1}{16\mu}\left\{\left[1+\cos(\theta)\right]\cdot\left[\kappa-\cos(\theta)\right]\right\} \tag{2}$$

$$a_{12} = \frac{1}{16\mu}\cdot\sin(\theta)\cdot\left[2\cdot\cos(\theta)-(\kappa-1)\right] \tag{3}$$

$$a_{22} = \frac{1}{16\mu}\cdot\left\{\left[\kappa+1\right]\cdot\left[1-\cos(\theta)\right]+\left[1+\cos(\theta)\right]\cdot\left[3\cdot\cos(\theta)-1\right]\right\} \tag{4}$$

Onde:

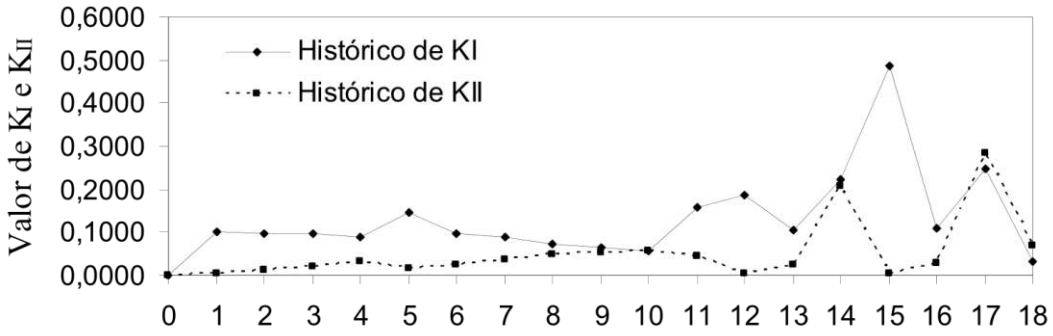
$\mu = \frac{K_I}{K_{II}}$, razão entre os fatores de intensidade;

$\kappa = 3-4\cdot\upsilon$, para o estado plano de deformação.

As Equações 2, 3 e 4 foram resolvidas através do software MATLAB® e os fatores de intensidade de tensão KI e KII nos modos um (*opening mode*, i.e., fratura se propaga no plano por abertura normal à sua face) e dois (*shear mode*, i.e., escorregamento entre as faces na direção do comprimento da fissura) respectivamente, são obtidos através do trabalho anteriormente já citado, i.e., Figueiredo (2008) que obteve experimentalmente.

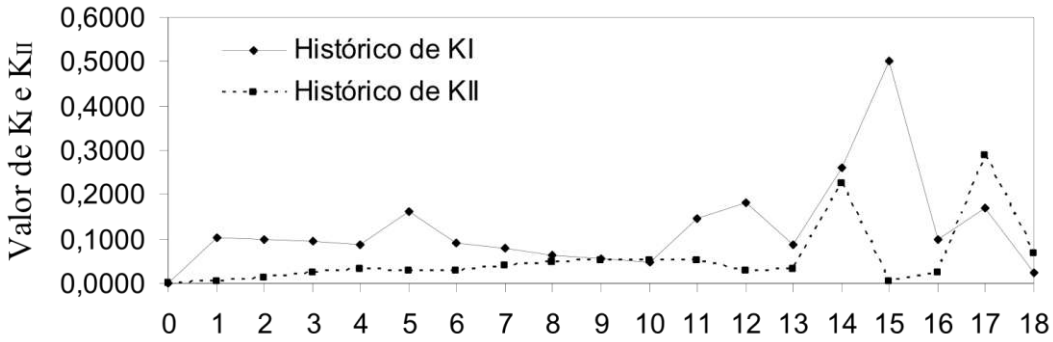
Em seguida foi realizado a interpolação dos valores para os 18 passos de propagação para 3 comprimentos de propagação distintos com o mesmo deslocamento controlado imposto ($\Delta L = 1 \times 10^{-5}$), conforme as Figuras 1, 2, 3, respectivamente. A Tabela 1 apresenta a razão entre os modos.

Figura 1 – Histórico de KI e KII para elemento de propagação de comprimento $\ell = 0.002$



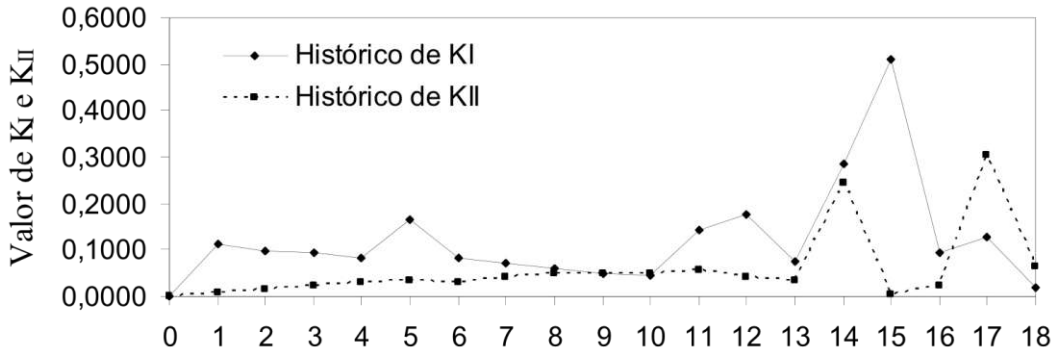
Fonte: Figueiredo (2008).

Figura 2 – Histórico de KI e KII para elemento de propagação de comprimento $\ell = 0.001$



Fonte: Figueiredo (2008).

Figura 3 – Histórico de KI e KII para elemento de propagação de comprimento $\ell = 0.0005$



Fonte: Figueiredo (2008).

Tabela 1 – Razão entre os fatores de intensidade

μ		
ℓ = 0.002	ℓ = 0.001	ℓ =0.0005
17.42857143	16.93333594	11.74193545
6.790697925	6.023529495	5.684684749
4.424242435	3.649999992	3.885350314
2.562500044	2.657752455	2.550239255
7.963636734	5.489011068	4.636363733
3.74358978	3.071428622	2.574879231
2.307359331	2.094623646	1.655913997
1.443708613	1.27540982	1.192660571
1.189024404	1.037821496	0.960606058
0.968571423	0.882175219	0.890243897
3.422382675	2.857142868	2.448275859
31.16666663	6.164835276	4.086021586
4.070967754	2.370044093	1.858778633
1.115000001	1.158387326	1.178423236
79.05405394	61.80000008	56.99999995
3.094339637	3.567251575	3.860759583
0.883997621	0.588301461	0.441475148
0.422077926	0.105022838	0.245999996

Fonte: O autor.

O ângulo de propagação é aquele que minimiza o termo $S(\theta)$ da Equação 1. Por meio desse critério define-se que a fissura irá propagar na direção em que a densidade de energia de deformação for mínima. Além disso, a estabilidade para o crescimento das fissuras é efetuada por meio da relação da Equação 5:

$$S_{cr} = \frac{\kappa - 1}{8 \cdot \pi \cdot \mu} \cdot K_{IC}^2 \tag{5}$$

O coeficiente de tenacidade a fratura no modo 1, i.e., K_{IC} refere-se a característica do material, sendo que para este estudo foi considerado um material quase frágil, portanto foi considerado um valor de $1.24 MPa \cdot m^{1/2}$.

Nesse critério verifica-se que a fissura irá propagar quando a densidade de energia de deformação atingir um valor crítico S_{cr} apresentado na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores críticos para os 18 passos de propagação

$S_{crítico}$		
ℓ = 0.002	ℓ = 0.001	ℓ = 0.0005
0.002808224	0.002890354	0.00416825
0.007207408	0.008125357	0.008609682
0.011062533	0.013409131	0.012596889

0.019099835	0.018415307	0.019191661
0.006145851	0.008916602	0.010556404
0.013073903	0.015935037	0.019008009
0.021211836	0.023366168	0.029556685
0.033901112	0.038374589	0.041037097
0.041162593	0.047159679	0.050950468
0.05053146	0.05548028	0.054977437
0.014300951	0.017130165	0.019990937
0.001570374	0.007939114	0.011978235
0.012022529	0.020650809	0.026330907
0.043895361	0.042251263	0.041532895
0.000619112	0.000791963	0.000858655
0.015817051	0.013720178	0.012677124
0.055365905	0.0831943	0.110863156
0.115958038	0.466025574	0.198956621

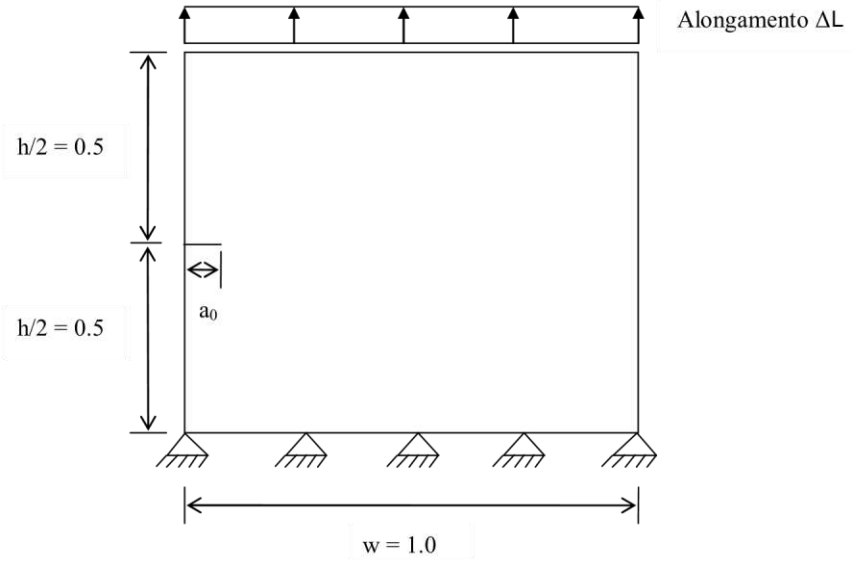
Fonte: O autor.

2.2 Implementação Computacional

A análise foi realizada através do método numérico conhecido por Método de Elemento de Contorno Dual (DBEM), resolvendo o problema analítico complexo pela discretização do componente em pequenos nós e elementos isoparamétricos lineares deixando assim o problema puramente numérico de modo a facilitar a resolução e o desempenho da análise.

Para efeito de comparação, o modelo estrutural foi concebido similar ao de FIGUEIREDO (2008), do qual realiza-se a simulação de propagação para um deslocamento imposto apresentado na Figura 4, a partir de uma fratura inicial de canto (a_0). Em seguida, a Tabela 3 apresenta os dados do modelo.

Figura 4 – Modelo sob deslocamento controlado



Fonte: Figueiredo (2008).

Tabela 3 – Dados do modelo

	Nomenclatura	Valores	Unidade de medida
Altura	h	1.0	[m]
Largura	w	1.0	[m]
Fratura Inicial	a_0	0.05	[m]
Alongamento fixo	Δ L	$1x10^{-5}$	[m]
Módulo de deformação longitudinal	E	21	[kPa]
Coeficiente de *Poisson*	υ	0.3	-
Passos de propagação	-	18	-

Fonte: O autor.

3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A comparação da direção da propagação da trinca/fissura entre o critério de máxima tensão circunferencial e mínima densidade de energia de deformação são apresentados na Tabela 4, respectivamente.

Tabela 4 – Comparação entre os critérios de propagação

Máxima Tensão Circunferencial θ_c [°]			Mínima Densidade Energia de Deformação $\theta_{mínimo}$ [°]		
ℓ = 0.002	ℓ = 0.001	ℓ = 0.0005	ℓ = 0.002	ℓ = 0.001	ℓ = 0.0005
-6.52513	-6.71297	-9.59905	-6.49757	-6.68300	-9.51363
-16.09359	-17.92937	-18.87192	-15.72559	-17.43727	-18.30861
-23.35838	-27.19804	-25.91842	-22.39358	-25.82766	-24.68752
-34.81492	-34.01353	-34.92026	-32.62579	-31.90264	-32.72111
-13.89363	-19.45969	-22.47235	-13.64832	-18.84950	-21.59423
-26.67617	-30.85732	-34.70908	-25.36305	-29.08050	-32.53007
-37.11466	-39.21579	-44.13509	-34.72471	-36.68411	-41.51321
-46.82207	-49.10368	-50.27519	-44.35657	-46.92643	-48.31174
-50.32743	-52.55564	-53.73568	-48.37465	-51.15635	-52.71358
-53.61264	-54.96314	-54.83553	-52.54831	-54.40117	-54.22238
-28.54429	-32.42922	-35.81614	-27.02461	-30.48197	-33.53474
-3.66794	-17.56209	-24.90889	-3.66297	-17.09637	-23.78535
-24.98218	-36.52817	-41.75754	-23.85094	-34.18553	-39.12874
-51.40459	-50.77005	-50.48007	-49.69476	-48.91175	-48.55905
-1.44899	-1.85310	-2.00894	-1.44868	-1.85246	-2.00811
-30.69677	-27.67448	-26.04713	-28.93765	-26.25148	-24.80235
-54.93429	-59.81201	-62.37301	-54.36068	-61.82204	-66.26043
-62.71769	-68.53621	-65.90876	-66.88492	-78.22815	-72.94229

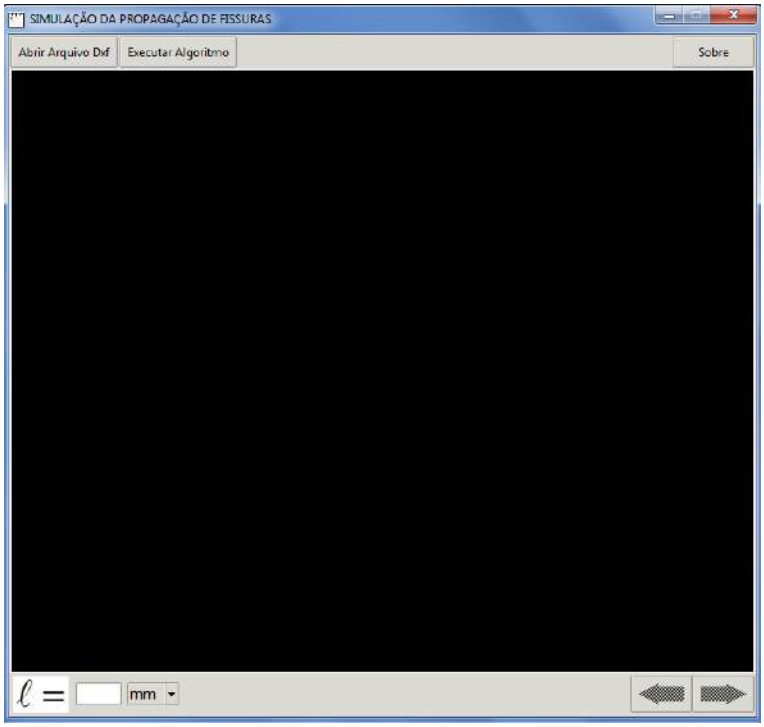
Fonte: O autor.

É notório observar que para os 3 comprimentos distintos de propagação (ℓ) em todos os 18 passos, os valores dos ângulos da direção da trinca para ambos os critérios são próximos. As diferenças entre os dois critérios são relativamente maiores para os últimos passos de propagação.

Conforme mencionado anteriormente, foi elaborado um programa com interface gráfica para geração dos resultados de modo a obter uma melhor visualização e análise da direção da

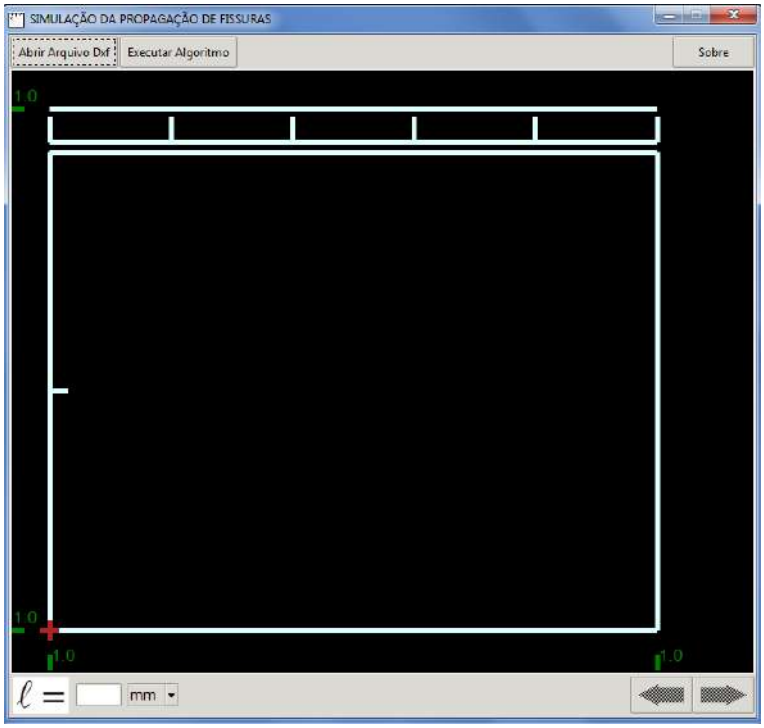
propagação da trinca/fissura a partir de um deslocamento controlado com fratura inicial de canto através do critério de Mínima Densidade de Energia de Deformação. A Figura 5 apresenta a interface do programa, e o modelo de placa sob deslocamento controlado é mostrado na Figura 6.

Figura 5 – Interface do programa



Fonte: O autor.

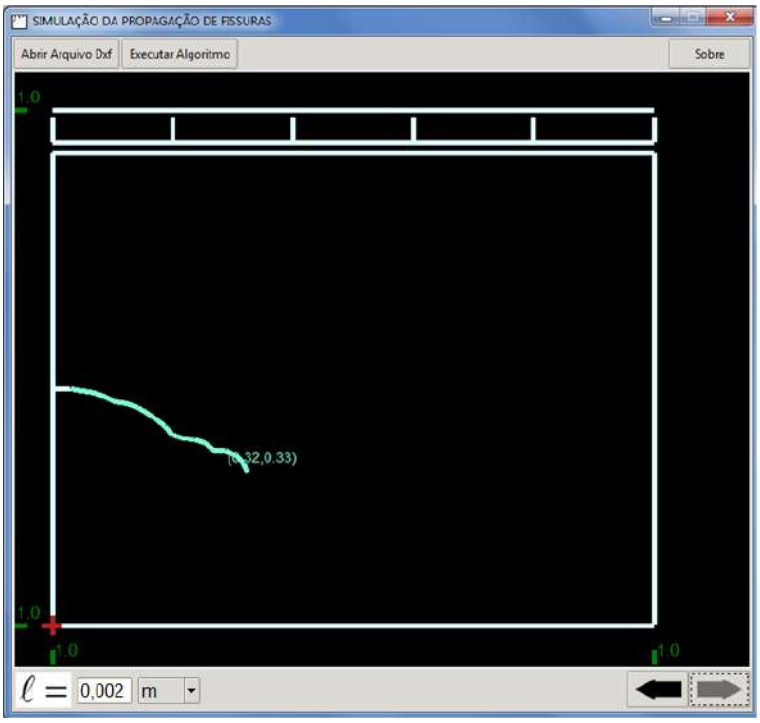
Figura 6 – Modelo estrutural importado no formato dxf



Fonte: O autor.

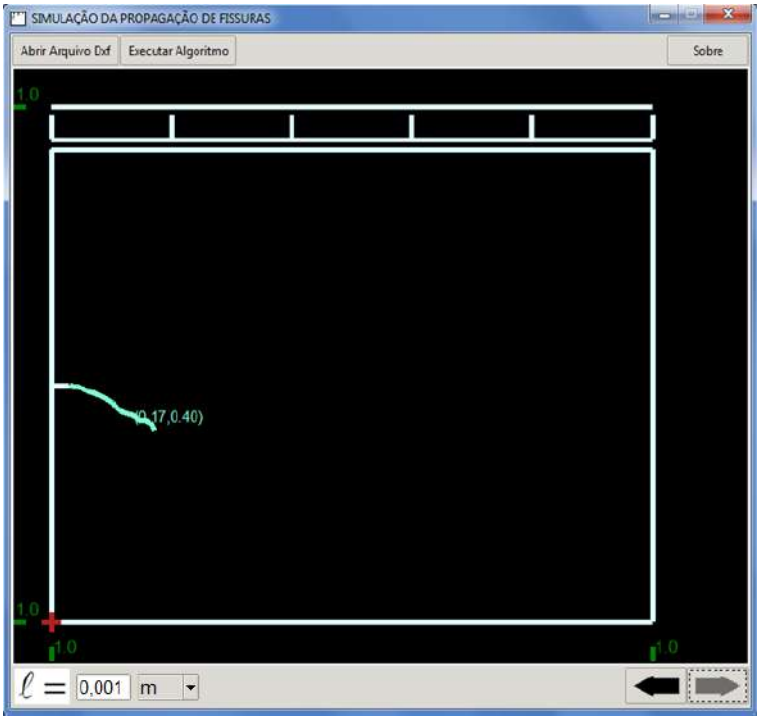
As Figuras 7, 8 e 9 apresentam o estado final das trincas/fissuras após o 18° passo, para os três comprimentos de propagação, i.e., 0.002, 0.001 e 0.0005, respectivamente.

Figura 7 – 18° passo de propagação para ℓ = 0.002



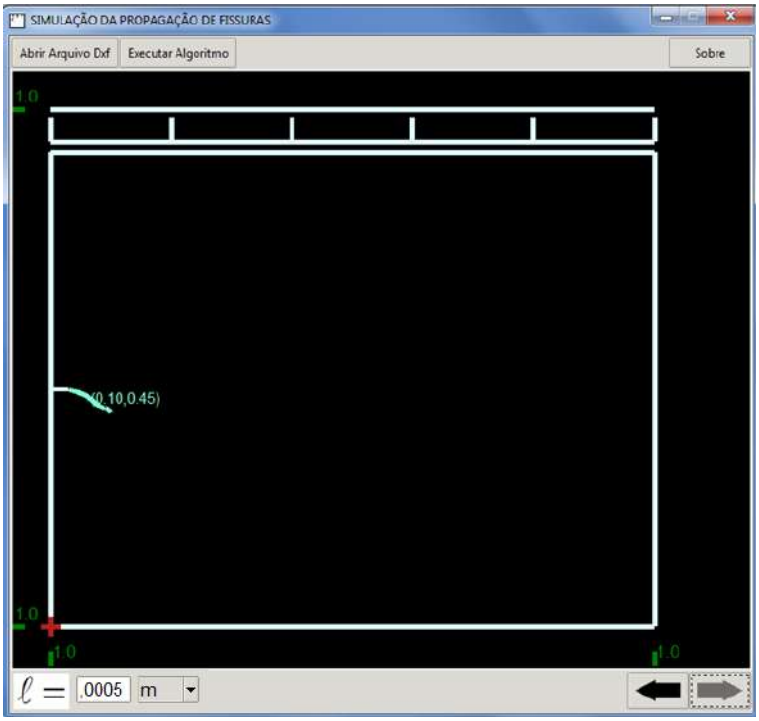
Fonte: O autor.

Figura 8 – 18° passo de propagação para ℓ = 0.001



Fonte: O autor.

Figura 9 – 18° passo de propagação para ℓ = 0.0005

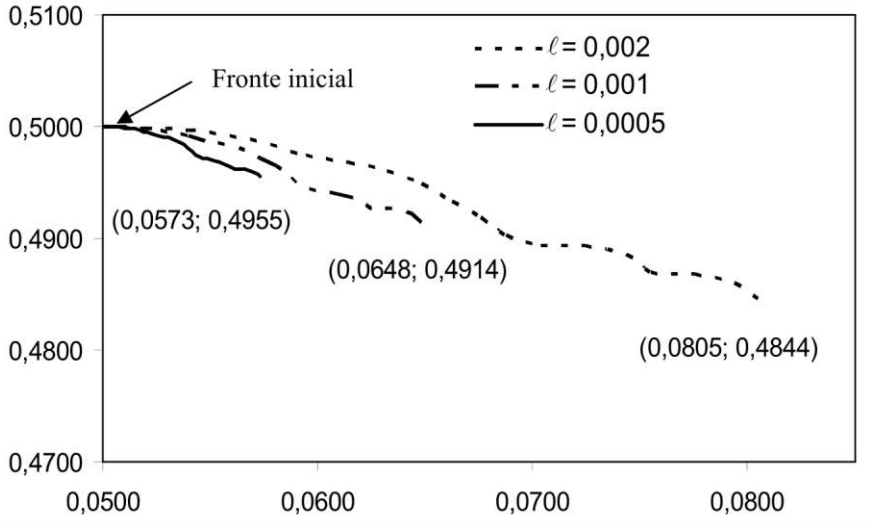


Fonte: O autor.

É notável que para os três comprimentos de propagação distintos para o mesmo deslocamento imposto (ℓ =0.002, ℓ =0.001, ℓ =0.0005) o desenvolvimento da fratura ocorre de modo semelhante, i.e., a distribuição de resposta é símil na trajetória.

Cabe salientar que a partir de uma fratura inicial de canto com formato reto para a estrutura em modelo, é nítido que a cada passo de propagação da trajetória foi adquirindo um formato curvo com valores de KI e KII atualizados, comprovando o efeito de cisalhamento no modelo. A Figura 10 apresenta os resultados obtidos pelo critério da máxima tensão circunferencial.

Figura 10 – Trajetória de propagação de trinca/fissura (Alongamento $\Delta L = 1x10^{-5}$)



Fonte: Figueiredo (2008).

A visualização da propagação das trincas/fissuras apresentados na Figura 10 com relação as Figuras 7, 8 e 9, bem como os valores obtidos na Tabela 4 através do critério da máxima tensão circunferencial comparada ao critério da mínima densidade de energia de deformação se demonstraram bastante coerentes.

4. CONCLUSÕES

Diante do exposto, o trabalho focou na simulação de trincas e fissuras através do método de elementos de contorno dual para um elemento de placa quase frágil através do modelo de zona coesiva.

Não obstante, os objetivos foram realizados com êxito em demonstrar a coerência dos resultados obtidos através do critério da mínima densidade de energia de deformação comparado ao critério da máxima tensão circunferencial.

À medida que a fratura foi-se desenvolvendo para os três casos, ocorreu uma redução do modo 1 (KI) e um aumento do modo 2 (KII), evidenciando assim o efeito da descontinuidade de deslocamentos tangenciais na fratura.

A implementação de um programa para visualização da propagação facilitou o entendimento, a interpretação bem como a análise do critério de mínima densidade de energia de deformação, dado uma fratura inicial.

Desse modo, ainda se faz necessário salientar a importância do estudo teórico analítico-numérico do comportamento de fraturas em materiais frágeis concatenado com a validação, calibração e comprovação experimental.

AGRADECIMENTOS

O autor gostaria de agradecer o apoio financeiro do CNPq (ID: 131992/2021-0), Brasil.

REFERÊNCIAS

FIGUEIREDO, L. G. O Método dos Elementos de Contorno Dual (DBEM) incorporando um modelo de zona coesiva para análise de fraturas. **Universidade Estadual de Campinas, 171p (Dissertação de Mestrado)**, 2008.

DUGDALE, D. S., **Yelding of steel sheets containing slits**, J. Mech. Phys. Solids vol. 8, pág. 100-104, 1960.

BARENBLATT, G. I. **The Formation of Equilibrium Cracks During Brittle Fracture: General Ideas and Hypotheses, Axially Symmetric Cracks**. Applied Mathematics and Mechanics (PMM), v. 23, 1959, pp. 622-636.

BARENBLATT, G. I. **Mathematical Theory of Equilibrium Cracks in Brittle Fracture**. Advances in Applied Mechanics, v. 7, 1962, pp. 55-129.

MODÉER, M. **A fracture mechanics approach to failure analyses of concrete materials**. Sweden: Division of Building Materials, University of Lund, 1979.

PETERSSON, P. E. **Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials**. Lund Inst. of Tech. (Sweden). Div. of Building Materials, 1981.

GUSTAFSSON, P. J. **Fracture Mechanics Studies of non-Yielding Materials Like concrete: Modeling of Tensile Fracture and Applied Strength Analysis**. Report Nº TVBM-1007, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund Sweden, 1985.

HILLERBORG, A., MODÉER, M., e PETERSSON, P. E. **Analysis of a crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements**, Cement and Concrete Research, vol. 6, pág. 773-782, 1976.

YANG, B., RAVI-CHANDAR, K. **On the role of the process zone in dynamic fracture**. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 44, 1955-1976, 1996.

ERDOGAN, F., SIH, G. C. **On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear**. Journal of Basic Engineering, 85, 519-527, 1963.

SIH, G. C. **Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems**, Int. Journal Fract. Mechanics, V. 10, 305-321, 1974.

MATLAB. Matrix Laboratory - R2015b. MathWorks - MATLAB and Simulink for Technical Computing.