Anais do Congresso Brasileiro de Patologia das Construções
CBPAT2016

Abril de 2016
ISSN 2448-1459

# USO DO MODELO DE BIELAS E TIRANTES PARA ANÁLISE DE VIGAS REFORÇADAS

**N. RIBEIRO VASCONCELOS**
Aluno de Graduação
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Ceará; Brasil
nadineribeirov@gmail.com

**E. CUNHA ARAUJO**
Aluno de Graduação
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Ceará; Brasil
emanoel.cunha@hotmail.com

**K.FURTADO TIMBÓ**
Aluno de Graduação
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Ceará; Brasil
karen.ft.12@gmail.com

**M. MEDEIROS XIMENES**
Aluno de Graduação
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Ceará; Brasil
xm.mariana@gmail.com

**R. JOSÉ CARVALHO SILVA**
Professor
Universidade Estadual Vale do Acaraú
Ceará; Brasil
ricardo.carvalho222@gmail.com

## RESUMO

O método de bielas e tirantes se mostra muito eficiente, já que propõe uma sistematização do dimensionamento de elementos estruturais tanto nas regiões B, onde ocorre uma distribuição linear de deformações segundo a hipótese de Bernoulli, como nas regiões D, sujeitas a descontinuidades estáticas e geométricas de acordo com o princípio de Saint Venant. O modelo permite a análise da viga como um todo, sem a necessidade de separar os esforços solicitantes e as forças internas para equilibrá-las, fazendo com que o projetista estrutural tenha um completo entendimento da estrutura, de maneira mais simples do que pelo método tradicional. Para que o método seja aplicado, faz-se necessária a formulação da topologia para identificação do fluxo de tensões nas estruturas de concreto em análise. O objetivo desse trabalho foi a adaptação desse método para vigas reforçadas com chapas de aço através de comparações dos resultados obtidos pelo modelo de bielas e tirantes com resultados experimentais de vigas com e sem reforço.

Palavras-chaves: bielas e tirantes, concreto armado, vigas.

## ABSTRACT

The strut and ties method are very effective, because proposes a systematic dimensioning of the structural elements both in the B regions, where occurs a linear distribution of deformations under the hypothesis Bernoulli, as D regions, submitted to static and geometric discontinuities according to the principle of Saint Venant's. The model allows analyze the beam as a whole, without the need for separate the active efforts and internal forces for balancing them, providing to the structural draftsman a complete understanding of the structure, more simple way than the traditional method. To apply this method, it is necessary to formulate the topology for identification of the flow stresses in the analyzed concrete structures. The objective of this study was to adapt this method for beams reinforced with steel plates through comparisons of results obtained by the strut and ties model with experimental results of beams with and without reinforcements.

Keywords: strut and tie, reinforced concrete, beams.

Abril de 2016
ISSN 2448-1459

## 1. INTRODUÇÃO

O método de Bielas e Tirantes é bastante eficiente já que pode ser desenvolvido tanto em áreas de descontinuidade quanto em áreas sem descontinuidade. A norma [4] informa que: ‘‘São chamadas de regiões B de um elemento estrutural aquelas em que as hipóteses da seção plana (Hipótese de Bernoulli, onde seções planas permanecem planas após a deformação). As regiões D são aquelas em que esta hipótese da seção plana não mais se aplica (regiões onde o princípio de Saint Venant é válido)’’. Sendo assim, uma representação mais realista da estrutura em análise, esse método permite uma visualização melhor das zonas onde a peça estrutural será mais solicitada. Para que o modelo seja aplicado deve-se sempre analisar o comportamento das estruturas no estado-limite último.

O modelo é inicialmente feito com base no campo de tensões elásticas ou fluxo interno de tensões no concreto, para tornar as regiões que estarão sujeitas a campos de compressão e tração conhecida, gerando assim, uma posterior aplicação da topologia mais adequada para a análise da estrutura em questão. Segundo[1], a idealização do modelo topológico pode ser baseada no fluxo de tensões elásticas e de suas direções principais obtidas através de uma análise elástica. Após o diagnóstico dos campos de força a que o concreto está submetido, deve-se fazer o cálculo das forças atuantes na estrutura pelo equilíbrio das forças internas e externas, para posteriormente projetar a estrutura do modelo pela aplicação do teorema do limite inferior da plasticidade.

O modelo usado nas vigas de estudo segue o modelo de uma treliça isostática, composta por bielas, tirantes e nós. Os nós (pontos de encontro de bielas e tirantes) recebem as forças concentradas. A armadura comporta-se como tirante, agindo como suporte à tração, as bielas são regiões do concreto sujeitas à compressão, além disso, existe a zona nodal que corresponde ao volume de concreto em volta do nó onde é verificada a resistência necessária para a transmissão das forças entre bielas e tirantes.

O objetivo do trabalho foi fazer a adaptação do método de bielas e tirantes para analisar vigas reforçadas com chapas de aço coladas e aparafusadas, que foram ensaiadas no laboratório da Universidade Estadual Vale do Acaraú. O motivo que levou à escolha dessas vigas para estudo foi que chapas de aço coladas e aparafusadas é um dos reforços mais utilizados no estado do Ceará.

O padrão a ser analisado foi proposto pelos diagnósticos dos caminhos das fissuras encontradas nas vigas reforçadas após o ensaio, (vigas foram nomeadas como X1, X3 e X5), seguindo a diretriz proposta na norma [4] onde ‘‘Os eixos das bielas devem ser escolhidos de maneira a se aproximar o máximo possível das tensões principais de compressão e dos tirantes, dos eixos das armaduras a serem efetivamente detalhadas’’ e ‘‘As bielas inclinadas devem ter ângulo de inclinação cuja tangente esteja entre 0,57 e 2 em relação ao eixo da armadura longitudinal do elemento estrutural’’.

A técnica de reforço estrutural através de chapas de aço consiste na adição de chapas de metálicas na base das estruturas de concreto com a fixação por intermédio de adesivos à base de resina epóxi. Para [2] as principais vantagens observadas na aplicação desse tipo de intervenção são: rapidez na execução; não utilização de materiais molhados ou úmidos; ausência de vibrações e baixo nível de ruídos; não há necessidade de instalações auxiliares importantes; o acréscimo da seção é pequeno; pouca interferência no uso da estrutura durante a execução da reabilitação. [3] ratifica que como desvantagens há a impossibilidade de visualização de fissuras sob a chapa, detecção de corrosão na parte interna da chapa, necessidade de sistema de proteção contra incêndio e corrosão, e possibilidade de deslocamento e destacamento da chapa.

A concepção deste trabalho fundamenta-se na análise de peças de concreto armado com reforço de chapas metálicas pertencentes ao GEM (Grupo de Pesquisa em Estruturas e Materiais), ensaiadas até a ruptura no Laboratório de Materiais de Construção e Estruturas do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Vale do Acaraú.

## 2. METODOLOGIA

Como o método de análise a ser aplicado, foi proposto uma rotina de cálculo que se inicia pela análise da geometria da viga, fazendo a caracterização dos materiais (concreto e aço). Posteriormente, analisa-se os carregamentos e descobre-se o modo de ruptura. É importante também fazer a análise dos caminhos das fissuras que logo após foi usada como base na montagem da treliça, essa análise permite a realização do cálculo das tensões nas bielas e tirantes. Por fim, tem-se a análise dos resultados.

As vigas foram ensaiadas no laboratório da universidade, com uso da prensa até chegar na sua ruptura. As três vigas nas quais foram estudadas possuem geometria fixas como mostra a figura 1. (0,8m x 0,15m x 0,10m). Os valores referentes as características dos materiais foram o $f_y$ da chapa de reforço e das armaduras e o $f_{cd}$ do concreto, sendo $f_y$ = 371 MPa e $f_{cd}$ = 30,3 MPa. As cargas de ruptura das vigas foram chamadas de P. Cada viga será analisada separadamente.

Abril de 2016
ISSN 2448-1459

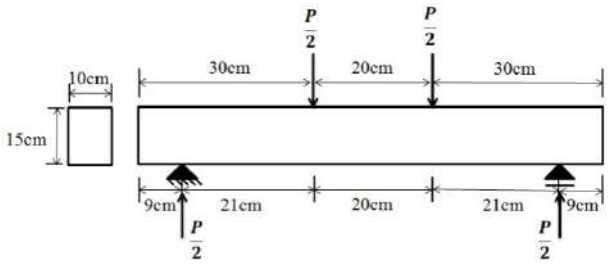



Figura 1: Dimensões das vigas

**Viga X1:**

Chamada de viga de referência (sem reforço) sua ruptura se deu com uma carga (P) de 111 kN, e seu modo de ruptura foi flexão, como pode ser verificado na Figura 2. Na Figura 3 segue a treliça que foi idealizada a partir dos caminhos das fissuras.




Figura 2: Fissuras da viga X1

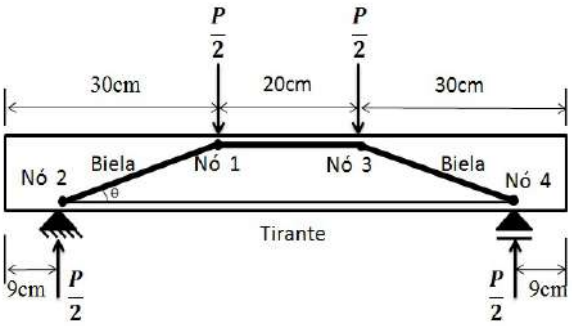
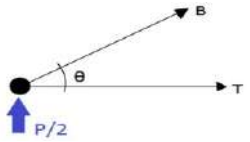



Figura 3: Modelo de bielas e tirantes para viga X1

Partindo do equilíbrio dos nós tem-se:




$$B.sen\theta + \frac{P}{2} = 0$$

$$T + B.cos\theta = 0$$

Então: $B = -\frac{P}{2}.sen\theta$ (1) e $T = \frac{P}{2}.tg\theta$ (2).

Conforme [4] propõe parâmetros de resistência de cálculo dos tirantes, onde Té o valor de cálculo da força de tração determinada no tirante, **As**corresponde aárea de aço a ser aplicada em cada tirante e $\mathbf{f_y}$ com valor da tensão de escoamento do aço (500 MPa). Todas as vigas possuem armadura longitudinal de 2 Φ 6,3 mm. Tendo a viga de referência **P** = 111 KN (fixo), obteve-se:

$$T = As.f_y \quad \textbf{(3)}$$

$T$ = 31,16 kN

Calculando o ângulo (**θ**) a partir da equação 2, temos que **θ** = 60º.

**Viga X3:**

A viga X3 foi reforçada com chapa de aço de 50(cm) x 10(cm), com 4 parafusos, dois em cada extremidade da chapa. Sua carga de ruptura (P) foi de 132 kN e seu modo de ruptura se deu por esmagamento da biela, como pode ser verificado na Figura 4/ Figura 5.Na Figura 5, tem-se a representação da treliça idealizada a partir do equilíbrio das cargas de que causaram a ruptura por compressão diagonal (esmagamento da biela).




Figura 4: Fissuras da viga X3

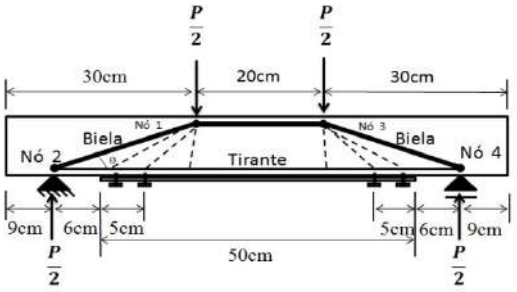



Figura 5: Modelo de bielas e tirantes para viga X3

A partir da equação 1 encontrada para bielas da viga X1, tem- se que:

$$\mathbf{B} = -(P/2).sen\theta, \text{ logo } \mathbf{B} = -70{,}7 \text{ kN.}$$
$$\mathbf{tg\theta} = 13/5, \text{então } \mathbf{\theta} = 69^{o}.$$

Segundo a Norma 6118:2014 para a verificação de tensões de compressão máximas nas bielas e regiões nodais, é definido o seguinte parâmetro:

$$\mathbf{F_{c3}} = 0{,}72.\ \alpha_{v2}.f_{cd} \text{ (bielas atravessadas por tirante único, ou nós CCT)} \mathbf{(4)}$$
$$\text{Onde: } \alpha_{v2} = (1-f_c/250).f_c$$
$$\text{Têm-se: } f_{c3}=19{,}17 \text{ MPa.}$$

**Viga X5:**

A viga X5 foi reforçada com chapa de aço de 30(cm) x 10(cm), com 4 parafusos, dois em cada extremidade da chapa. Sua carga de ruptura (P) foi de 125 kN e deu-se por flexão, como pode ser verificado na Figura 6. Na Figura 7, tem-se a representação da treliça idealizada a partir do equilíbrio das cargas que causaram a ruptura por flexão, usando-se os mesmos parâmetros iniciais de cálculo da viga X1(referência), mas com a idealização de uma segunda treliça causada pela ação dos parafusos do reforço da viga X3, resulta-se nos seguintes valores:

$$\boldsymbol{T}= 31{,}15_{(\text{referência})} + (0{,}30.0{,}10)/10000.200.10^{6}{}_{(X3)}$$

O valor do ângulo (θ) é obtido a partir da equação 1, então:

$$\mathbf{\theta} = 46^{o}$$




Figura 6: Fissuras da viga X5

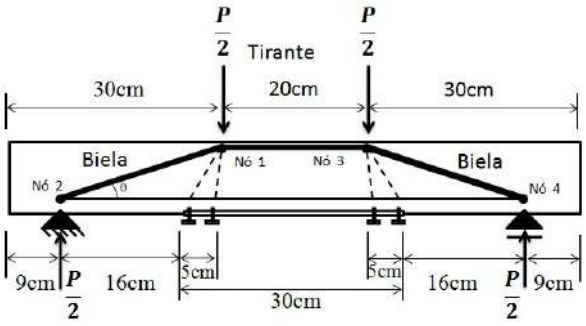



Figura 7: Modelo de bielas e tirantes para a viga X5

Para a viga X5 também se atribui a opção de que a chapa tivesse sido descolada, já que os caminhos das fissuras da viga se não se encontram bem definidos. Como podemos observar há fissura nos locais onde se encontram os parafusos, tornando-se duvidoso a sequência de eventos ruptura/descolamento ou descolamento/ruptura. Nesse caso, tem-se que o tirante (T) é igual a 31,15 kN, valor encontrado na viga X1. Aplicando a equação 2, tem-se que:

$$\theta = 63^{o}$$

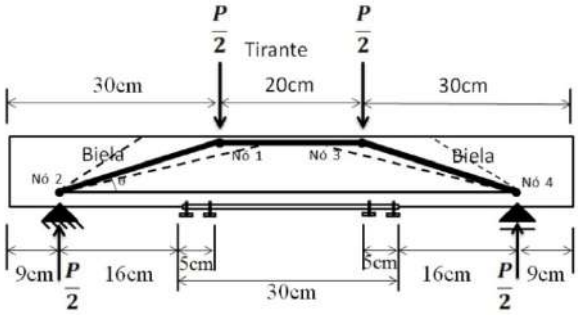



Figura 8: Modelo de bielas e tirantes para a viga X5

## 3. RESULTADOS E DISCUSSÕES

Para uma melhor análise dos resultados obtidos, fez-se o uso das seguintes tabelas, com base nas equações 1 e 2, mantendo a carga de ruptura (P) de cada viga e variando o ângulo de acordo com os limites pré-estabelecidos pela norma [4], observando-se as variações das bielas e dos tirantes em relação a carga encontrada pelas vigas ensaiadas.

Tabela 1- Viga X1

| T (KN) | θ (graus) | θ (rad) | P (KN) |
|---|---|---|---|
| 96,19 | 30,00 | 0,52 | 111,00 |
| 88,87 | 32,00 | 0,56 | 111,00 |
| 82,34 | 34,00 | 0,59 | 111,00 |
| 76,44 | 36,00 | 0,63 | 111,00 |
| 71,09 | 38,00 | 0,66 | 111,00 |
| 66,19 | 40,00 | 0,70 | 111,00 |
| 61,69 | 42,00 | 0,73 | 111,00 |
| 57,52 | 44,00 | 0,77 | 111,00 |
| 53,64 | 46,00 | 0,80 | 111,00 |
| 50,02 | 48,00 | 0,84 | 111,00 |
| 46,61 | 50,00 | 0,87 | 111,00 |
| 43,40 | 52,00 | 0,91 | 111,00 |
| 40,36 | 54,00 | 0,94 | 111,00 |
| 37,48 | 56,00 | 0,98 | 111,00 |
| 34,72 | 58,00 | 1,01 | 111,00 |
| 32,08 | 60,00 | 1,05 | 111,00 |
| 29,55 | 62,00 | 1,08 | 111,00 |
| 27,11 | 64,00 | 1,12 | 111,00 |
| 24,75 | 66,00 | 1,15 | 111,00 |
| 22,46 | 68,00 | 1,19 | 111,00 |

Tabela 2- Viga X3

| B (KN) | θ (graus) | θ (rad) | P (KN) |
|---|---|---|---|
| 132,06 | 30,00 | 0,52 | 132,00 |
| 124,60 | 32,00 | 0,56 | 132,00 |
| 118,08 | 34,00 | 0,59 | 132,00 |
| 112,34 | 36,00 | 0,63 | 132,00 |
| 107,25 | 38,00 | 0,66 | 132,00 |
| 102,72 | 40,00 | 0,70 | 132,00 |
| 98,68 | 42,00 | 0,73 | 132,00 |
| 95,05 | 44,00 | 0,77 | 132,00 |
| 91,79 | 46,00 | 0,80 | 132,00 |
| 88,85 | 48,00 | 0,84 | 132,00 |
| 86,19 | 50,00 | 0,87 | 132,00 |
| 83,79 | 52,00 | 0,91 | 132,00 |
| 81,61 | 54,00 | 0,94 | 132,00 |
| 79,64 | 56,00 | 0,98 | 132,00 |
| 77,85 | 58,00 | 1,01 | 132,00 |
| 76,23 | 60,00 | 1,05 | 132,00 |
| 74,77 | 62,00 | 1,08 | 132,00 |
| 73,45 | 64,00 | 1,12 | 132,00 |
| 72,26 | 66,00 | 1,15 | 132,00 |
| 71,20 | 68,00 | 1,19 | 132,00 |

Tabela 3- Viga X5

| T (KN) | θ (graus) | θ (rad) | P (KN) |
|---|---|---|---|
| 108,32 | 30,00 | 0,52 | 125,00 |
| 100,08 | 32,00 | 0,56 | 125,00 |
| 92,72 | 34,00 | 0,59 | 125,00 |
| 86,08 | 36,00 | 0,63 | 125,00 |
| 80,05 | 38,00 | 0,66 | 125,00 |
| 74,54 | 40,00 | 0,70 | 125,00 |
| 69,47 | 42,00 | 0,73 | 125,00 |
| 64,77 | 44,00 | 0,77 | 125,00 |
| 60,40 | 46,00 | 0,80 | 125,00 |
| 56,32 | 48,00 | 0,84 | 125,00 |
| 52,49 | 50,00 | 0,87 | 125,00 |
| 48,88 | 52,00 | 0,91 | 125,00 |
| 45,45 | 54,00 | 0,94 | 125,00 |
| 42,20 | 56,00 | 0,98 | 125,00 |
| 39,10 | 58,00 | 1,01 | 125,00 |
| 36,13 | 60,00 | 1,05 | 125,00 |
| 33,28 | 62,00 | 1,08 | 125,00 |
| 30,53 | 64,00 | 1,12 | 125,00 |
| 27,87 | 66,00 | 1,15 | 125,00 |
| 25,30 | 68,00 | 1,19 | 125,00 |

Abril de 2016
ISSN 2448-1459

A partir das tabelas acima, pôde- se observar, de maneira geral, que tanto as bielas quanto os tirantes variam de acordo com ângulo. Em todos os casos, quanto maior o ângulo, menor a força de tração (Tirantes) e compressão (Bielas). No caso das bielas, quanto maior sua inclinação, menor o esforço sofrido.

O modelo de bielas e tirantes tradicional, para as configurações das vigas ensaiadas X1, X3 e X5, é formado por zonas discretas de compressão (Bielas e Banzo Superior – Linhas Tracejadas) e zonas discretas de tração (Tirantes e Banzo Inferior – Linhas Cheias). As formações das bielas podem surgir de maneira direta (da ação até a reação) ou de maneira indireta (da ação/reação até os nós formados nas extremidades estribos). Esse modelo clássico de bielas e tirantes é apresentado na Figura 9a. Nesse trabalho, sugere-se a simplificação desse modelo reduzindo-se a representação dos 2 estribos entre a ação e a reação por apenas 1 estribo com o dobro da área. Dessa maneira, o modelo de bielas e tirantes da Figura 9a transforma-se no da Figura 9b.

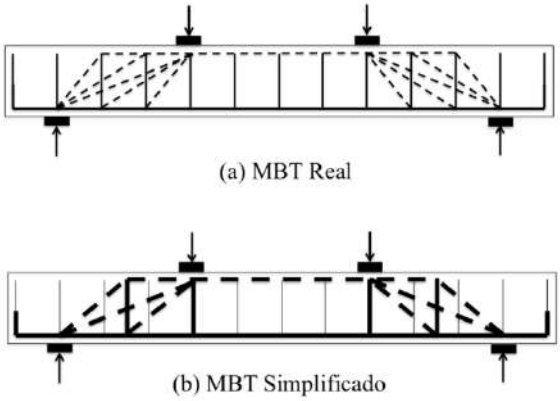



Figura 9: Modelo bielas e tirantes real e simplificado

Como a ideia do modelo de bielas e tirantes em uma viga na ruína sugere uma treliça isostática, optou-se por dividir a treliça da Figura 9b em duas treliças independentes: uma transfere a carga de maneira direta entre ação e reação (Figura 10c) e outra transfere a carga de maneira indireta (Figura 10d).

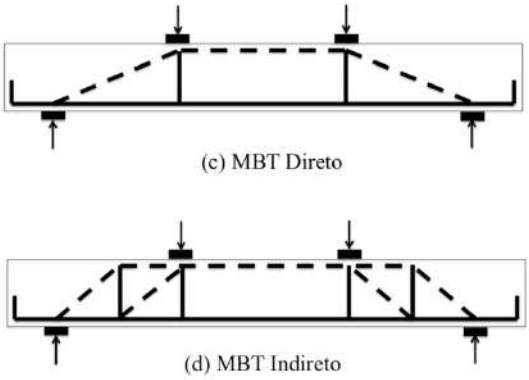



Figura 10: Modelo bielas e tirantes direto e indireto

Obviamente que a transferência de carga de maneira direta ou indireta depende de uma série de fatores, como: geometria da viga, distribuição das armaduras e muitos outros fatores ainda desconhecidos.

Os modelos diretos e indiretos para vigas reforçadas com chapas coladas e aparafusadas podem ser representados com uma simples adaptação do modelo discutido. Note que a viga reforçada com chapas de 30cm de comprimento deve ser representado como na Figura 11.

Abril de 2016
ISSN 2448-1459

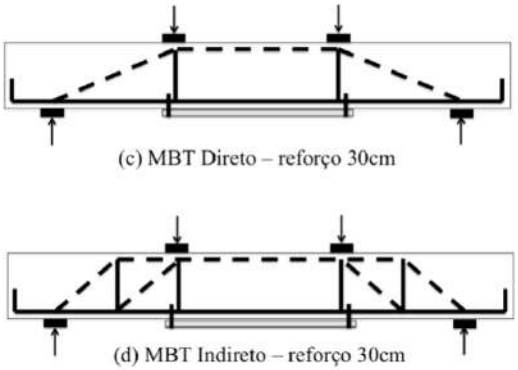



Figura 11: Modelo bielas e tirantes direto e indireto para vigas reforçadas com chapas de aço de 30cm coladas e aparafusadas (viga X5)

Os modelos diretos e indiretos para vigas reforçadas com chapas coladas e aparafusadas podem também ser representados com uma simples adaptação do modelo discutido. Note que a viga reforçada com chapas de 50cm de comprimento deve ser representado como na Figura 12, porém observe que a formação das bielas com as ancoragens dos parafusos nas regiões entre as ações e reações criam um campo bem desfavorável para uma possível ruptura por compressão diagonal, como ocorreu experimentalmente na viga X3. Os valores das cargas das bielas prejudicadas devem ser calculadas com o aumento da carga resultante da reação do reforço escoando nas referidas biela.

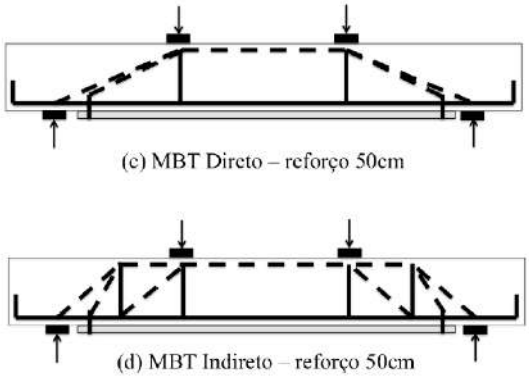



Figura 12: Modelo bielas e tirantes direto e indireto para vigas reforçadas com chapas de aço de 50cm coladas e aparafusadas (viga X3)

Desta maneira, sugere-se como contribuição dessa pesquisa os modelos da Figura 12 para vigas reforçadas onde o parafuso se ancora em regiões onde exista possibilidade de formação de bielas com ângulos menores que 60º. E sugere-se os modelos da Figura 12 para vigas reforçadas onde o parafuso se ancora onde não exista possibilidade de formação de bielas com ângulos menores que 60º.

## 4. CONCLUSÕES

O modelo de Bielas e Tirantes se faz bastante eficaz para análises práticas específicas, pois atende a uma topologia inerente a cada tipo de viga, visto que analisa as cargas atuantes na estrutura em estudo, tendo como base de cálculo os caminhos de força resultantes dos campos de tração(banzo inferior-aço) e compressão (bielas e banzo superior-concreto), como a análise nodal que corresponde aos pontos de encontro entre as barras de uma armadura em forma de treliça, assim como a zona nodal que corresponde ao volume de concreto que envolve o nó. Logo, tem-se uma representação bem realista do comportamento da estrutura, fazendo com que o projetista tenha um resultado mais realista, já que trata-se de um experimento e baseia-se em resultados obtidos através de análises laboratoriais por meio de carregamentos previamente estabelecidos que são aplicados à viga até que esta atinja a ruptura.

Após a ruptura, obtém-se o modo que a viga rompeu, assim, pode-se adotar o modelo mais favorável a cada geometria e carregamento específico, fazendo com que os reforços com chapa de aço coladas e aparafusados sejam mais

eficientes, já que foram testadas sua eficiência através da comparação com vigas sem reforço. Desta forma, o modelo de bielas e tirantes torna-se favorável à aplicação no dimensionamento de vigas de concreto armado.

Durante as análises laboratoriais foi observada que os esforços reduziram consideravelmente com o aumento do ângulo de inclinação das bielas em relação à armadura longitudinal, com isso fica explícita a importância dos cálculos específicos para cada tipo de carga atuante bem como modelo de viga analisada, já que tanto o ângulo quanto a carga atuante são variáveis que dependem da função a que a estrutura será destinada.

Portanto, o modelo de bielas e tirantes para vigas reforçadas, apesar de ainda apresentar muitas variáveis desconhecidas e deficiente acervo bibliográfico, pôde se observar que é de grande contribuição para o conhecimento e desempenho satisfatório de estruturas reforçadas, pois através de análises experimentais, auxilia o calculista e o responsável pela execução da obra na obtenção de resultados aproximados quanto a resistência das estruturas aos carregamentos propostos.

## 5. AGRADECIMENTOS

Os autores do trabalho agradecem ao Profº. Ricardo Carvalho pelo auxilio e orientação durante todo o desenvolvimento da pesquisa e ao GEM (Grupo de Pesquisa em Estruturas e Materiais) pelo apoio.

## 6. REFERÊNCIAS

[1] Schlaich J., Schaefer K., and Jennewein M., *Toward a Consistent Design of Structural Concrete*, PCI Journal, Vol. 32, No. 3, 1987.
[2] REIS; Andréa Prado Abreu. *Reforço de vigas de concreto armado por meio de barras de aço adicionais ou chapas de aço e argamassa de alto desempenho*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos. 1998. 239 p.
[3] ROMERO, Diana Valeria Schwenk*; Reforço à flexão de vigas de concreto armado por meio de protensão externa*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. Março de 2007. 125 p.
[4] ABNT NBR 6118. Projetos de estruturas de concreto – Procedimento. 2014. 256 p.
[5] SILVA, Ricardo José Carvalho. *Análise do Modelo de Bielas e Tirantes para vigas de concreto armado com furo*. Essentia, Sobral, vol.15, Nº 2, p. 67-87, Dezembro 2013/Maio 2014.
[6] SANTOS, Daniel dos. *Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes*. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo. São Carlos 2006. 195 p.
[7] SANTOS, Daniel dos; GIONGO, José Samuel. *Análise de vigas de concreto armado utilizando modelos de bielas e tirantes*. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v.10, n. 46, p. 61-90, 2008.
[8] PANTOJA, João da Costa. Avaliação *de desempenho de modelos de bielas e tirantes via análise de confiabilidade*. Congresso Brasileiro de Pontes e Estruturas. Rio de Janeiro. 2010. 19 p.